# *Spiral plat sans courbes terminales*

## *Perturbations causées par l'inertie du spiral*

### *Cas d'une montre bracelet*

### Caractéristiques du spiral

Référence :E:\Résonateur (TA)\Data\Bal_spiral plat (ex num).mcd(R)

Dimensions $\quad ép = 0.03\,mm \quad ha = 0.15\,mm \quad S = 4.5\times10^{-3}\,mm^2 \quad TOL := 10^{-12}$

$d2_{sp} = 4.52\,mm \quad d1_{sp} = 1.1\,mm \quad p_{sp} = 0.135\,mm \quad n_{sp} = 12.667 \quad m_s = 3.95\,mg$

$L := L_{sp} \quad L = 11.182\,cm \quad \psi_0 := 2\cdot\pi\cdot n_{sp} \quad \psi_0 = 4.56\times10^3\,deg$

Position du piton $\quad r_P := 0.5\cdot d2_{sp} \quad \alpha_P := 0 \quad x_P := r_P\cdot cos(\alpha_P) \quad y_P := r_P\cdot sin(\alpha_P)$

$x_P = 2.26\,mm \quad y_P = 0\,mm \quad z_P := x_P + i\cdot y_P$

Position du point d'attache à la virole $\quad r_V := 0.5\cdot d1_{sp} \quad \alpha_V(\theta) := \psi_0 + \theta \quad x_V(\theta) := r_V\cdot cos(\alpha_V(\theta)) \quad y_V(\theta) := r_V\cdot sin(\alpha_V(\theta))$

Forme du spiral en fonction de l'élongation du balancier

$$\psi(\theta) := \psi_0 + \theta \qquad a := \frac{r_P - r_V}{\psi_0} \qquad r_s(\alpha) := r_P - a\cdot\alpha \qquad s(\alpha) := r_P\cdot\alpha - \frac{a}{2}\cdot\alpha^2$$

$$x(\alpha) := r_s(\alpha)\cdot cos(\alpha) \qquad y(\alpha) := r_s(\alpha)\cdot sin(\alpha) \qquad z_0(\alpha) := r_s(\alpha)\cdot exp(i\cdot\alpha) \qquad \alpha_0 := 120\cdot deg$$

(valeur de test)

Moment quadratique de section

Référence :E:\Résonateur (TA)\Tables\Modules J, I et W des barres élastiques.mcd(R)

$I_{33} := I_{f\_rect}(ép, ha)$

### *Calcul de la variation du moment d'inertie du spiral*

$$z_1(\theta,\alpha) := z_P + \int_0^{\alpha} \left[-a + i\cdot(r_P - a\cdot\alpha')\right]\cdot exp\left[i\cdot\alpha'\cdot\left[1 + \frac{\theta}{L}\cdot\left(r_P - \frac{a}{2}\cdot\alpha'\right)\right]\right] d\alpha'$$

$$z'_1(\theta,\alpha) := \frac{d}{d\theta}z_1(\theta,\alpha) \qquad J_s(\theta) := \frac{m_s}{L}\cdot\int_0^{\psi_0} \left(\left|z'_1(\theta,\alpha)\right|\right)^2\cdot r_s(\alpha)\, d\alpha$$

$$J_s(0) = 1.993\,mg\cdot mm^2 \qquad J_s(\theta_0) = 1.777\,mg\cdot mm^2$$

### Calcul des coefficients de Haag

Par intégration numérique $\quad k := 6 \quad n := 0, 2 .. k$

$$g(\alpha,n) := \int_0^{\alpha} \left(s(\alpha)\cdot m^{-1} - s(\alpha')\cdot m^{-1}\right)^n\cdot s(\alpha')\cdot cos(\alpha - \alpha')\cdot r_s(\alpha')\, d\alpha'$$

$$\mathbf{A}_n := \frac{2\cdot(-1)^{0.5\cdot n}}{(n)!\cdot\left(L\cdot m^{-1}\right)^{n+5}\cdot m^5}\cdot\int_0^{\psi_0} (L - s(\alpha))\cdot s(\alpha)\cdot g(\alpha,n)\cdot r_s(\alpha)\, d\alpha \qquad \mathbf{A}_0 = 4.037\times10^{-5}$$

$$\mathbf{A}^T = \left(4.037 \;\; 0 \;\; 2.58\times10^{-3} \;\; 0 \;\; -3.148\times10^{-5} \;\; 0 \;\; 8.136\times10^{-7}\right)10^{-5}$$

Approximativement:

$$A_0 := \frac{r_P^{\,2} + 3\cdot r_V^{\,2}}{\left(r_P + r_V\right)^2}\cdot\frac{1}{3\cdot\psi_0^{\,2}} \qquad A_0 = 4.009\times10^{-5}$$

$$A_2 := \frac{r_P^{\,4} + 3\cdot r_P^{\,2}\cdot r_V^{\,2} + 6\cdot r_V^{\,4} - 10\cdot r_P^{\,2}\cdot r_V^{\,2}\cdot\cos(\psi_0)}{\left(r_P + r_V\right)^4}\cdot\frac{8}{5\cdot\psi_0^{\,4}} \qquad A_2 = 2.494\times10^{-8}$$

$$B(n) := \frac{r_P\cdot r_V\cdot\left[3\cdot\left(r_P^{\,3} + r_V^{\,3}\right) - (4\cdot n + 3)\cdot r_P^{\,2}\cdot r_V - (4\cdot n + 7)\cdot r_P\cdot r_V^{\,2}\right]}{\left(r_P + r_V\right)^5}$$

$$A(n) := \frac{32\cdot(-1)^{0.5\cdot n}}{(n)!\cdot\psi_0^{\,4}}\cdot\left[\frac{r_P^{\,2}\cdot r_V^{\,2}}{\left(r_P + r_V\right)^4}\cdot\cos(\psi_0) - B(n)\cdot\frac{\sin(\psi_0)}{\psi_0}\right]\cdot(n > 2) \qquad A(4) = -4.989\times10^{-10}$$

$$A(6) = 19.021\,10^{-12}$$

$$\boldsymbol{A} := \left(A_0 \;\; 0 \;\; A_2 \;\; 0 \;\; A(4) \;\; 0 \;\; A(6)\right)^T$$

$$\boldsymbol{A}^T = \left(4.009 \;\; 0 \;\; 2.494\times10^{-3} \;\; 0 \;\; -4.989\times10^{-5} \;\; 0 \;\; 1.902\times10^{-6}\right)10^{-5}$$

## ***Perturbation de période***

$$\delta_{Js}(\theta_0) := \frac{1}{2\cdot\pi\cdot J_b}\cdot\int_0^{\pi} J_s(\theta_0\cdot\cos(\varphi))\,d\varphi \qquad \mu_{Js}(\theta_0) := -86400\cdot\delta_{Js}(\theta_0) \qquad \mu_{Js}(\theta_0) = -86.651$$

Par développement en série:

$$\delta d_{Js}(\theta_0) := \frac{m_s\cdot L^2}{2\cdot J_b}\cdot\sum_n\left[\frac{n!}{2^n\cdot((0.5\cdot n)!)^2}\cdot\mathbf{A}_n\cdot\theta_0^{\,n}\right] \qquad \mu d_{Js}(\theta_0) := -86400\cdot\delta d_{Js}(\theta_0) \qquad \mu d_{Js}(\theta_0) = -86.69$$

Approximativement:

$$\delta a_{Js}(\theta_0) := \frac{m_s\cdot L^2}{2\cdot J_b}\cdot\sum_n\left[\frac{n!}{2^n\cdot((0.5\cdot n)!)^2}\cdot\boldsymbol{A}_n\cdot\theta_0^{\,n}\right] \qquad \mu a_{Js}(\theta_0) := -86400\cdot\delta a_{Js}(\theta_0) \qquad \mu a_{Js}(\theta_0) = -86.068$$

$$j := 0..10 \qquad \theta_j := j\cdot 30\cdot deg \qquad \mu d_j := \mu d_{Js}(\theta_j) \qquad \mu a_j := \mu a_{Js}(\theta_j)$$

$$\mu d_{Js}(0) = -86.144$$

$$\mu a_{Js}(0) = -85.535$$